El proceso matemático de definir: más allá de conocer una definición

Claudia Vargas y **Carmen Samper**
Universidad Pedagógica Nacional
cmvargasg@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

En este cursillo los asistentes realizarán actividades con geometría dinámica, con el fin de establecer posibles definiciones para un objeto geométrico específico y reconocer en qué consiste el definir como proceso matemático. Se presentará una herramienta analítica que permite evidenciar cómo promueve la argumentación y el comportamiento racional de estudiantes escolares. Se ilustrará su uso con un ejemplo de las interacciones de un grupo de estudiantes de décimo cuando realizaban esa actividad.

Justificación

En las clases de matemáticas es habitual que el docente sea quien da las definiciones, con lo cual no hay espacio para que el estudiante participe en la construcción de las mismas y en el análisis de diferentes definiciones para un mismo objeto (Hershkowitz, 1990; Vinner, 1991). Las definiciones en las prácticas de geometría escolar son necesarias para que el estudiante pueda construir argumentos, razonar y comunicar sus ideas y que, a la vez, pueda usar la argumentación para evaluar y validar diferentes propuestas de definición de una figura geométrica (Furinghetti y Paola, 2002; Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2008). Su participación les permite a los estudiantes pasar de ideas intuitivas acerca de un objeto geométrico, producto de experiencias empíricas, a definiciones formales mediante aproximaciones por refinamiento (Aya, Echeverry y Samper, 2014).

Así, las definiciones emergen como objetos de estudio en el contexto de la matemática escolar. Esto exige que el docente reflexione acerca del proceso de conformación de un concepto, el rol de la definición en este proceso y el tratamiento que se le debe dar cuando se introduce una definición. Un estudio realizado por Vargas y Betancur (2015) muestra que la participación de estudiantes de grado décimo en la construcción de definiciones promueve la formulación de diferentes tipos de argumentos y genera la preocupación por validar ideas.

Vargas, C. y Samper, C. (2017). El proceso matemático de definir: más allá de conocer una definición. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 93-97). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO DE REFERENCIA

El marco teórico que fundamenta el cursillo incluye dos aspectos. Por una parte, los referentes que precisar y explicar lo que significa definir en geometría y, en particular, en la geometría escolar. Por otra parte, los referentes que permiten analizar los discursos de los estudiantes cuando proponen y validan definiciones de un objeto geométrico.

Una *definición* en geometría es un enunciado que menciona las propiedades necesarias y suficientes para que una figura o relación pueda ser etiquetada con una expresión o una palabra. Para definir en geometría es necesario establecer las diferencias de un objeto con otros objetos similares, pues una definición agrupa figuras que cumplen un conjunto de propiedades específicas que no pueden ser ambiguas (Herbst, González y Macke, 2005). Además, estas definiciones se construyen con base en conceptos que se han definido y estudiado con anterioridad. Para un objeto o concepto matemático pueden existir muchas definiciones equivalentes (Chesler, 2012). En las matemáticas escolares, las definiciones se caracterizan por ser convencionales y no necesariamente económicas. Se eligen como respuesta a fines estéticos, didácticos u operativos (Calvo, 2001).

Cuando los estudiantes proponen definiciones, sus producciones orales se analizan según dos aspectos: (i) los argumentos proferidos (Toulmin, 1958) y (ii) el involucramiento en actividades propias del quehacer matemático, para lo cual usamos el modelo de comportamiento racional propuesto por Habermas y adaptado por Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010).

De acuerdo con Toulmin (1958), un argumento relaciona dos proposiciones, *datos* y *aserción*, por medio de una regla general denominada *garantía*. Los *datos* se refieren a hechos o propiedades que en algún momento se aceptan como verdaderos. La *aserción* menciona una propiedad que se considera como consecuencia de los datos. La *garantía* refiere a los principios o enunciados que permiten realizar inferencias que relacionan los datos con la aserción.

Por otra parte, el modelo de comportamiento racional en prácticas discursivas, propuesto por Habermas (Boero et al., 2010), distingue tres componentes: el *epistémico*, que se refiere al control de la validez de las proposiciones y a las formas válidas de razonamiento; el *teleológico*, que hace referencia a la formulación de un plan y la elección consciente de herramientas o elementos teóricos con el fin de lograr el objetivo planteado; y el *comunicativo*, que consiste en la elección adecuada de términos, aceptados por la comunidad para comunicar ideas.

La Figura 1 muestra características propias de cada aspecto del comportamiento racional en el proceso de proponer definiciones y evaluarlas.

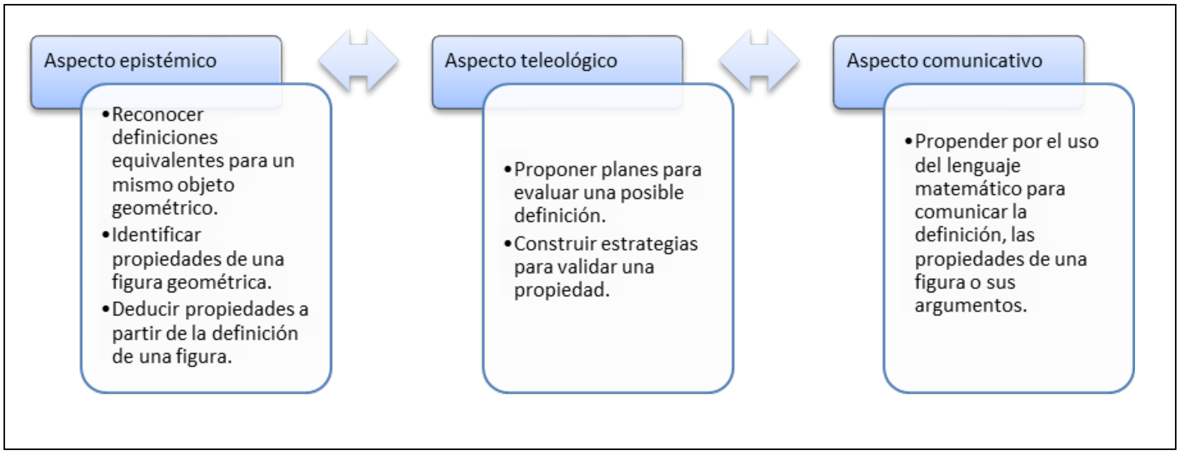

Figura 1. Características del comportamiento racional durante el proceso de demostración (Vargas y Betancur, 2015)

DESARROLLO DEL CURSILLO

El cursillo se realizará en dos sesiones. La primera sesión tiene como objetivo que los asistentes reconozcan propiedades de una figura geométrica que podrían ser usadas para definirla, y a partir de la exploración con geometría dinámica, determinen qué conjunto de ellas conforman las condiciones suficientes y necesarias para definir la figura.

Por ejemplo, el siguiente conjunto de actividades tiene como objetivo que se propongan y evalúen posibles definiciones de cuadrado a partir de las propiedades que descubren con geometría dinámica:

1. ¿Qué es un cuadrado?

2. Construya un cuadrado en geometría dinámica y reporte los pasos de la construcción.

3. Compare la definición con los pasos que realizó para construir el cuadrado e indique si utilizó todas las propiedades reportadas en su definición del numeral 1 para construirlo.

4. Explore algunas propiedades de la figura construida y repórtelas.

A partir de conjuntos de propiedades que se descubren, se promueve un análisis para determinar qué subconjuntos de estas permiten proponer otra definición para cuadrado.

La segunda sesión tiene como propósito proveer a los participantes una herramienta analítica que les permita evaluar las prácticas discursivas de sus estudiantes cuando proponen y validan definiciones.

REFERENCIAS

Aya, O., Echeverry, A. y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 35, 63-86.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M. M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 179-205). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, España.
Disponible en: http://www.tdx.cat/handle/10803/4689

Chesler, J. (2012). Pre-service secondary mathematics teachers making sense of definitions of functions. *Mathematics Teacher Education and Development*, *14*(1), 27-40.

Furinghetti, F. y Paola, D. (2002). Defining within a dynamic geometry enviroment: Notes from the classroom. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 392-399). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Herbst, P., González, G. y Macke, M. (2005). How can geometry students understand what it means to define in mathematics? *The Mathematics Educator*, *15*(2), 17-24.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-95). Cambridge, Reino Unido: University Press.

Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. En L. Radford, G.

Schubring y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture* (pp. 195-214). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Vargas, C. y Betancur, J. (2015). *Análisis del comportamiento de los estudiantes cuando proponen una definición para una figura geométrica con el apoyo de geometría dinámica* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Disponible en: http://repository.pedagogica.edu.co/xmlui/handle/123456789/1920

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learnig of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-80). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Press.